

Vortragsübung 1 - Lyapunov-Theorie

V1) Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 - 2x_2 - 4x_1^3\end{aligned}$$

und die Lyapunov Funktion

$$V(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1^4.$$

- a) Zeigen Sie, dass der Ursprung $x = [0 \ 0]^T$ stabil ist.
- b) Zeigen Sie, dass der Ursprung $x = [0 \ 0]^T$ global asymptotisch stabil ist.

V2) Betrachten Sie das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - kh(x_1) \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2,\end{aligned}$$

wobei k ein reeller Reglerparameter ist.

Schätzen Sie den Einzugsbereich ab für die Fälle

- a) $h(x_1) = x_1$
- b) $h(x_1) = \arctan(x_1)$ (Sättigungsfunktion).

Benutzen Sie gegebenenfalls die quadratische Lyapunov-Funktion

$$V(x) = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

Wie verändert sich die Abschätzung des Einzugsbereichs in Abhängigkeit von k ? Was ist der Zusammenhang der Abschätzung des Einzugsbereichs und des tatsächlichen Einzugsbereichs?

V3) Gegeben seien die Eulerschen Gleichungen in Hauptachsenform ohne externe Momente, d.h.

$$\begin{aligned}J_1\dot{\omega}_1 &= (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 \\ J_2\dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1)\omega_1\omega_3 \\ J_3\dot{\omega}_3 &= (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2,\end{aligned}$$

wobei J_1, J_2, J_3 die paarweise verschiedenen Trägheitsmomente des Systems sind mit $J_1 > J_2 > J_3$.

- a) Untersuchen Sie die Stabilität der Ruhelage $[0 \ 0 \ 0]^T$ mit einer geeigneten Lyapunov-funktion.
- b) Welche weiteren Ruhelagen hat das System? Zeigen Sie, dass die Ruhelage $[0 \ \lambda \ 0]^T$ instabil ist.